הרצאה 14

חישוב אינטגרל כפול בתחום כללי. החלפת משתנה באינטגרל כפול.

1. בנוסף לכך נרחיב את המושג אינטגרל חוזר לתחום מלבני לתחום יותר כללי D מן הצורה: $a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)$. אנו מניחים שכל קו אנכי חותך את השפה של D לכל היותר בשתי הנקודות $(x, y_1(x))$ ו-$(x, y_2(x))$ לכל $x \in (a,b)$. כאן נגדיר פונקציה חדשה $f^*(x,y)$ בתחום מלבני באופן הבא: $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$.

2. אז אינטגרל חוזר נרשם בצורה: $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$.

3. ניסוח המשפט (משפט פוביני) דומה עבור תחום D שאינו מלבן. תחום D מקיים: כל קו אנכי חותך את השפה של D לכל היותר בשתי הנקודות $(x, y_1(x))$ ו-$(x, y_2(x))$ לכל $x \in (a,b)$ כך ש-$y_1(x) \le y_2(x)$.

4. הנוסחה $\int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$ (דומה לנוסחה הקודמת) מתאימה לתחום D המקיים: כל קו אופקי חותך את השפה של D לכל היותר בשתי הנקודות $(x_1(y), y)$ ו-$(x_2(y), y)$ לכל $y \in (c,d)$ כך ש-$x_1(y) \le x_2(y)$.

5. דוגמה 2. שנה סדר האינטגרציה ב-dx $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx$.

6. לפי השרטוט הגבולות החשים הם: $y=0, y=1, x=y^2, x=y$ ולכן
$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

7. דוגמה 3. חשב את האינטגרל $\iint_D e^{\frac{y}{x}} ds$ בשתי האופציות. כאן D כלוא בין הקווים $y = x, y = 0, x = 1$.
לפי שרטוט התחום ניתן לרשום את שני האינטגרלים החוזרים לפי משפט פוביני:
$\iint_D e^{\frac{y}{x}} ds = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx \right) dy$ אך כדי להשתמש באינטגרציה לא מסוימת אפשר לחשב רק את האינטגרל החוזר הראשון. אמנם,
$$\int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx = \int_0^1 x e^{\frac{y}{x}} \Big|_0^x dx = (e-1)\int_0^1 x\,dx = (e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

8. דוגמה 4. חשב את $\iint_D xy\,ds$ כאשר D נמצא בין $x^2 + y^2 \le 1$ ו-$|x+y| \le 1$.

לפי השרטוט של התחום נצטרך לפצל אותו לשני תת תחומים D_1 ו-D_2 כאשר D_1 מוגדר $-1 \le x \le 0, -1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$ ו-D_2 מוגדר על ידי $0 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le 1-x$
לכן

$$\iint_D xy\,ds=\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}}xydy\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x}xydy\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{xy^2}{2}\Bigg|_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{xy^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}x\left(1-x^2-\left(-1-x\right)^2\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}x\left(\left(1-x\right)^2-\left(1-x^2\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}x\left(-2x-2x^2\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}x\left(2x^2-2x\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(-2x^2-2x^3\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(2x^3-2x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{6}$$

9. נניח ש- D תחום במישור xOy החסום על ידי עקומה סגורה L ונניח שקיימת העתקה המעבירה את D ל- D' במישור uOv על ידי

$$, x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$$

כך שפונקציות φ,ψ חד-חד-ערכיות, רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות ב- D'.

10. לכל נקודה $P(x,y)\in D$ תחת ההעתקה ההפוכה קיימת נקודה $P'(u,v)\in D'$. לקווים ישרים $u=const$ ו- $v=const$ במישור uOv מתאימות עקומות מסוימות במישור xOy. נחלק את D' על ידי קווים המקבילים לצירים ונתבונן במלבן עם קודקודיו $P_1'\left(u,v\right),P_2'\left(u+\Delta u,v\right),P_3'\left(u+\Delta u,v+\Delta v\right),P_4'\left(u,v+\Delta v\right)$. השטח של המלבן $P_1'P_2'P_3'P_4'$ שווה ל- $\Delta s=\Delta u\Delta v$. נמצא את שטח "המלבן העקום" $P_1P_2P_3P_4$ $\Delta s'$ בתנאי ש- $\Delta u,\Delta v$ קטנים.

11. מהדיפרנציאביליות של הפונקציות φ,ψ ניתן להניח כי:

$$, x_1=\varphi\left(u,v\right), y_1=\psi\left(u,v\right)$$

$$, x_2=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, y_2=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u$$

$$, x_3=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, y_3=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$$

$$. x_4=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, y_2=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$$

12. לא קשה לבדוק שהקירוב הליניארי של "המלבן העקום" $P_1P_2P_3P_4$ הינו מקבילית. אמנם, $x_2-x_1=x_3-x_4=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u$ ו- $y_2-y_1=y_3-y_4=\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u$ והשטח שלו שווה לערך המוחלט של המכפלה הווקטורית של P_1P_2 ו- P_1P_4 לכן

$$. \Delta s=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_4-x_1\\ y_2-y_1 & y_4-y_1\end{vmatrix}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\end{vmatrix}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}\Delta u\Delta v$$

13. הדטרמיננטה זאת נקראת יעקוביאן ומסומנת ב- J או $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ ואז $dxdy=|J|dudv$.

14. נוסחת החלפת המשתנה באינטגרל כפול היא

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

15. פירוש גיאומטרי של יעקוביאן – יחס בין השטחים האלמנטאריים.

16. דוגמה 5. חשב את האינטגרל $\iint_D (y-x)\,dxdy$ כאשר D חסום על ידי הקווים הבאים:

$y=x+1, y=x-3, y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}, y=-\frac{1}{3}x+5$.

נסמן ב- $u=y-x$ ו- $v=y+\frac{1}{3}x$ אז היחס ההפוך הוא $x=\frac{3}{4}(v-u)$ ו- $y=\frac{1}{4}(u+3v)$

ואז $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=-\frac{3}{4}$, לכן

$$\iint_D (y-x)\,dxdy=\iint_{D'} u\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\frac{3}{4}\int_{\frac{7}{3}}^{5}\left(\int_{-3}^{1} u\,du\right)dv=\frac{3}{4}\frac{8}{3}\frac{u^2}{2}\Big|_{-3}^{1}=1-9=-8.$$

אפשר בדוגמה זאת לחשב את האינטגרל ללא למעבר ליחס הפוך. אמנם, מפני ש-

$y-x=u$ נמצא את יעקוביאן ההפוך $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}=-\frac{4}{3}$ אז

$$\iint_D (y-x)\,dxdy=\iint_D (y-x)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\underbrace{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|dxdy}_{dudv}=\frac{3}{4}\iint_{D'} u\,dudv=-8$$

17. החלפת המשתנה הקואורדינאטות קוטביות: $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ והיעקוביאן

$J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho$ והנוסחה היא

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho d\rho d\theta.$$

18. דוגמה 6. חשב $\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}$ כאשר $D=\{(x,y):9\le x^2+y^2\le 25\}$.

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}=\iint_{D'}\frac{\rho d\rho d\theta}{\rho^2-1}=\int_0^{2\pi}\left(\int_3^5\frac{\rho d\rho}{\rho^2-1}\right)d\theta=2\pi\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\rho^2-1\right)\Big|_3^5=\pi\ln 3.$$

19. דוגמה 7. חשב $\iint_D y\,dxdy$ $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 2x, x>y\}$.

בקואורדינאטות קוטביות ניתן לתאר את התחום $0\le\rho\le 2\cos\theta$ ו- $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

$$\iint_D y\,dxdy=\iint_{D'}\rho\sin\theta\rho d\rho d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\rho\right)d\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta=-\frac{8}{3}\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{6}$$

יישומים של אינטגרל כפול.

20. שטח התחום: $S(D)=\iint_D ds=\iint_D dxdy$.

21. נפח הגוף. יהיה גוף גלילי החסום על ידי משטח גלילי עם מדריך מקביל לציר ה- z וחסום מלמעלה על ידי המשטח $z=f(x,y)$ ומלמטה על ידי המישור $z=0$ אז $V=\iint_D f(x,y)ds$.

22. מסה של גוף מישורי $m=\iint_D \rho(x,y)ds$, כאשר $\rho(x,y)$ היא הצפיפות של בגוף בנקודה (x,y).

23. מרכז הכובד: $x_0=\frac{\iint_D x\rho(x,y)ds}{\iint_D \rho(x,y)ds}, y_0=\frac{\iint_D y\rho(x,y)ds}{\iint_D \rho(x,y)ds}$.

24. דוגמה 8. מצא את מרכז הכובד של המשולש בעל הקודקודים: $O(0,0),A(1,0),B(0,2)$.

ידוע שמרכז הכובד נמצא בנקודת החיתוך של תיכונים (או בנקודה המחלקת את התיכונים ביחס $2:1$ מהקודקוד). לכן התיכון לצלע AB מחבר את הנקודות $(0,0)$ ו- $\left(\frac{1}{2},1\right)$. אז מרכז הכובד של המשולש נמצא בנקודה $C\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. נבדוק את תוצאה באמצעות הנוסחאות הנ"ל.

משוואת הישר AB היא $y=-2x+2$ לכן

$$\iint_D ds=\int_0^1\left(\int_0^{-2x+2}dy\right)dx=\int_0^1(-2x+2)dx=\left(-x^2+2x\right)\Big|_0^1=1,$$

$$\iint_D xds=\int_0^1\left(\int_0^{-2x+2}xdy\right)dx=\int_0^1 x(-2x+2)dx=\left(-\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3},$$

$$\iint_D yds=\int_0^1\left(\int_0^{-2x+2}ydy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(-2x+2)^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{4x^3}{3}-4x^2+4x\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3},$$ לכן

$x_C=\frac{1}{3},y_C=\frac{2}{3}$.